数理解析研究所講究録 1469 巻 2006 年 79-85

部分的デファイナブル G 自明性について

川上 智博

640-8510 和歌山市栄谷 930

和歌山大学教育学部数学教室

kawa@center.wakayama-u.ac.jp

1. 部分的デファイナブル自明性

ここでは、$\mathcal{R}=(\mathbb{R},+,\cdot,>)$ の o-minimal 拡張 $\mathcal{M}=(\mathbb{R},+,\cdot,>,\dots)$ で考察する。実閉体上でも議論することができるが、ここでは、$\mathcal{M}$ に制限して考える。デファイナブルカテゴリーに関しては、[2], [3] などで議論されている。

部分的デファイナブル自明性に関して、次の定理が知られている。

定理 1.1. *([2])* (部分的デファイナブル自明性) $f:S\to A$ をデファイナブル写像とする。このとき、S のデファイナブル集合 $\{C_i\}$ への有限分割とデファイナブル写像 $h_i:f^{-1}(C_i)\to f^{-1}(y_i)$ が存在して、各 $(f,h_i):f^{-1}(C_i)\to C_i\times f^{-1}(y_i)$ がデファイナブル同相写像である。ただし、$y_i\in C_i$ とする。

一般の場合は、必ず分割しなければならない。

例 1.2. $X=\{(x,y)|xy=1\}\cup\{(x,y)|x=0\}\subset\mathbb{R}^2, Y=\mathbb{R}, f(x,y)=x$ とすると、*3* つに分けなければ、部分的デファイナブル自明とならない。

問題 1.3. *(1)* 部分的デファイナブル自明性の C^r 版、同変版、C^r 同変版はどうか？

(2) 部分的デファイナブル自明性より強く、デファイナブル自明性が成り立つ場合はどんなときか？

2000 *Mathematics Subject Classification.* 57S10, 57S15, 58A05, 03C64.
Keywords and Phrases. Definable sets, definable C^r manifolds, o-minimal, affine.

2. 部分的デファイナブル G 自明性

群 G が**デファイナブル群**とは、G がデファイナブル集合であって、群演算 $G\times G\to G$ と $G\to G$ がデファイナブルであることである。デファイナブル群の**表現写像**とは、G からある直交群 $O(n)$ への群準同型写像で、デファイナブルとなるものである。G の**表現**とは、G の表現写像の表現空間のことである。**デファイナブル G 集合**とは、ある G 表現の G 不変デファイナブル部分集合のことである。

X,Y をデファイナブル G 集合とする。デファイナブル G 写像 $f:X\to Y$ が**デファイナブル G 自明**とは、ある $y\in Y$ とデファイナブル G 写像 $h:X\to f^{-1}(y)$ が存在して、$(f,h):X\to Y\times f^{-1}(y)$ がデファイナブル同相写像となることである。

定理 2.1. *([6])* G をコンパクトデファイナブル群、S を G 表現 Ω の中のデファイナブル G 集合とする。A をある $\mathbb{R}^n$ の中のデファイナブル集合とし、$f:S\to A$ を G 不変デファイナブル写像とする。このとき、A のデファイナブル集合 $\{A_i\}$ への有限分割が存在して、各 $f|f^{-1}(A_i):f^{-1}(A_i)\to A_i$ がデファイナブル G 自明である。

n を 8 以上自然数とする。n 次元球面 S^n に直交群 $O(n+1)$ が自然に作用しているとする。接束 $T(S^n)$ から S^n への射影 π は、自明ではなく、作用は推移的なので、π は部分的デファイナブル自明とならない。よって、定理 2.1 において、G 不変の条件は必要である。

定理 2.1 の証明のために、以下の準備が必要である。

定理 2.2. *(10.2.18 [2])* G をコンパクトデファイナブル群、X をデファイナブル G 集合とする。このとき、軌道空間 X/G はデファイナブル集合として存在し、射影 $\pi:X\to X/G$ はデファイナブル、連続かつ固有である。

K を G の部分群とする。$G\times_K X$ は、$G\times X$ を同値関係 $(g,x)\sim(gk^{-1},kx), k\in K$ で割った商空間とするとき、以下の補題が成り立つ。

補題 2.3. G をコンパクトデファイナブル群、K,H を G のデファイナブル部分群で $K\subset H$ を満たすとする。X がデファイナブル K 集合ならば、写像 $G\times_K X\to G\times_H (H\times_K X), [g,x]\mapsto[g,[e,x]]$ はデファイナブル G 同相写像である。

コンパクト位相群 G と G 空間 X に対して、$x\in X$ のとき、$G_x=\{g\in G|gx=x\}$ を x における**アイソトロピー群**といい、G の閉部分群となっている。X のアイソトロピー群としてあらわれる H,K の共役類 $(H),(K)$ に対して、順序 $(H)\le(K)$ を H は K のある部分群と共役と定義する。これは、順序となって、それらを**軌道型**という。

定理 2.1 の証明. 定理 2.2 より、軌道空間 S/G はデファイナブル集合で射影 $\pi: S \to S/G$ はデファイナブル、連続かつ固有である。よって、f から誘導される連続デファイナブル写像 $\overline{f}: S/G \to A$ が存在して、$f = \overline{f} \circ \pi$ を満たす。[2] より、$\overline{f}$ は部分的デファイナブル自明である。だから、π が部分的デファイナブル G 自明であることを示せばよい。

$S \subset \Omega$ で Ω は G 表現なので、S は有限個の軌道型がしかもたない。それらを $(H_1), \dots, (H_l)$ とする。各 (H_i) に対して、$S(H_i) = \{x \in S | (G_x) = (H_i)\} = \{x \in S | \exists g \in G \ gG_x g^{-1} = H_i\}$. なので、$S(H_i)$ はデファイナブル G 部分集合である。さらに、$\pi(S(H_i)) = S(H_i)/G$ は $\pi(S) = S/G$ のデファイナブル部分集合である。π を $\pi|S(H_i): S(H_i) \to S(H_i)/G$ に制限することにより、S はただひとつの軌道型 (H) をもつとしてよい。

このとき、H 不動点集合 $S^H = \{s \in S | hs = s \ \forall h \in H\}$ は S の閉 N 部分集合となる。ただし、N は H の正規化群とする。写像 $\alpha: G \times_N S^H \to S, \alpha([g,x]) = gx$ は、α のグラフが作用写像 $G \times S \to S$ の $G \times S^H$ への制限の射影 $\pi_1: G \times S^H \to G \times_N S^H$ の像となるので、デファイナブル G 同相写像となる。

さらに、包含写像 $j: S^H \to S$ は、デファイナブル同相写像 $\beta: S^H/N \to S/G$ を誘導する。定理 2.2 より、S^H/N のデファイナブル集合への有限分割 $\{A_i\}_{i=1}^k$ が存在して、各 i に対して、デファイナブル同相写像 $\phi_i: N/H \times A_i \to \pi_H^{-1}(A_i)$ で $\pi_H \circ \phi_i = p_1$ を満たすものが存在する。ただし、$\pi_H: S^H \to S^H/N$ は射影を表し、p_1 は射影 $N/H \times A_i \to A_i$ を表すとする。

$B_i = \beta(A_i)$ とする。H は A_i 上自明に作用しているので、$N \times_H A_i \cong N/H \times A_i$ かつ $G \times_H A_i \cong G/H \times A_i$ である。だから、$\psi_i : G/H \times B_i \to \pi^{-1}(B_i), \psi_i(gH, x) = g \cdot (j \circ \phi(eH, \beta^{-1}(x)))$ は、補題 2.3 と $G/H \times B_i \cong G/H \times A_i \cong G \times_H A_i \cong G \times_N (N \times_H A_i) \cong G \times_N (N/H \times A_i) \cong G \times_N \pi_H^{-1}(A_i) \cong G \times_N (\pi^{-1}(B_i))^H \cong \pi^{-1}(B_i)$ なので、デファイナブル G 同相写像である。 □

3. 部分的デファイナブル $C^r G$ 自明性

群 G が**デファイナブル C^r 群**とは、G がデファイナブル C^r 多様体であって、群演算 $G \times G \to G, G \to G$ がデファイナブル C^r 写像であることである。デファイナブル C^r 群 G が**アフィン**とは、G がデファイナブル C^r 多様体としてアフィンであることである。**デファイナブル $C^r G$ 多様体**とは、デファイナブル C^r 多様体 X と群作用 θ の組であって、$\theta: G \times X \to X$ がデファイナブル C^r 写像となるものである。(X, θ) と書く代わりに、省略して X と書く。

X, Y をデファイナブル C^rG 多様体とする。デファイナブル C^rG 写像 $f : X \to Y$ が**デファイナブル C^rG 自明**とは、ある $y \in Y$ とデファイナブル C^rG 写像 $h : X \to f^{-1}(y)$ が存在して、$(f, h) : X \to Y \times f^{-1}(y)$ がデファイナブル C^rG 微分同相写像となることである。

定理 3.1. *([6]) G をコンパクトデファイナブル C^r 群、$1 \leq r < \infty$ とする。S を G 表現の中のデファイナブル C^rG 部分多様体、A を $\mathbb{R}^n$ の中のデファイナブル C^r 部分多様体とする。このとき、任意の G 不変全射デファイナブル C^r 沈めこみ $f : S \to A$ に対して、A のデファイナブル C^r 部分多様体への有限分割 $\{A_i\}$ が存在して、各 $f|f^{-1}(A_i) : f^{-1}(A_i) \to A_i$ がデファイナブル C^rG 自明となる。*

さらに、$\mathcal{M}$ が C^ω (C^∞) セル分解をもつならば、$r = \omega$ ($r = \infty$) ととることができる。

定理 3.1 の証明. S の次元に関する帰納法で証明する。$\dim S = 0$ のときは、明らかである。

$\dim S = k > 0$ とする。10.1.8 [2] より、G はデファイナブル群とデファイナブル群同型である。定理 2.1 より、A のデファイナブル集合への有限分割 $\{D_j\}$ が存在して、各 $f|f^{-1}(D_j) : f^{-1}(D_j) \to D_j$ がデファイナブル G 自明である。$\{D_j\}$ を保存する A の C^r セル分解を考えることにより、$\{D_j\}$ の各成分は A のデファイナブル C^r 部分多様体としてよい。

$S_j = f^{-1}(D_j)$ とする。このとき、S_j は S は、デファイナブル C^rG 部分多様体である。$\dim S_j = k$ となるものだけ考えればよい。というのは、$\dim S_j < k$ ならば、帰納法の仮定により、$f|S_j : S_j \to D_j$ は部分的デファイナブル C^rG 自明となるからである。

$f|S_j : S_j \to D_j$ は沈めこみである。$f|S_j : S_j \to D_j$ がデファイナブル G 自明なので、連続デファイナブル G 写像 $h_j : S_j \to F_j$ が存在して、$(f|S_j, h_j) : S_j \to D_j \times F_j$ がデファイナブル G 同相写像である。ただし、$F_j = f^{-1}(a_j), a_j \in D_j$ とする。h_j にセル分解定理を適用することにより、S_j の閉 G 不変デファイナル部分集合 S'_j が存在して、$\dim S'_j < k$ かつ $h_j|S_j - S'_j : S_j - S'_j \to h_j(S_j - S'_j) \subset F_j$ がデファイナブル C^rG 写像となる。$S_j - S'_j$ が S_j において開かつ G 不変なので、$f(S_j - S'_j)$ は、$f(S_j)$ の開 G 不変デファイナブル部分集合である。

このとき、$(f, h_j)|S_j - S'_j : S_j - S'_j \to f(S_j - S'_j) \times h_j(S_j - S'_j)$ は、デファイナブル C^rG 写像である。同じ議論を $(f, h_j)|S_j - S'_j$ の逆写像に適用することにより、$S_j - S'_j$ の閉 G 不変デファイナブル部分集合 W_j と $f(S_j - S'_j) \times h_j(S_j - S'_j)$ の閉 G 不変デファイナブル部分集合 W'_j で $\dim W_j, \dim W'_j < k$ かつ $(f, h_j)|(S_j - S'_j - W_j) : S_j - S'_j - W_j \to$

$(f(S_j - S_j') \times h_j(S_j - S_j')) - W_j'$ がデファイナブル C^rG 微分同相写像となる。$S_j - S_j' - W_j$ の C^r セル分解 $\{U_j^l\}$ をとる。

このとき、$(f, h_j)(W_j) = W_j'$ なので、各 $(f, h_j)|U_j^l : U_j^l \to f(U_j^l) \times h_j(U_j^l)$ はデファイナブル C^rG 微分同相写像である。$f(S_j' \cup W_j)$ の C^r セル分解 $\{T_\lambda\}$ をとる。このとき、各 $f^{-1}(T_\lambda)$ は S デファイナブル C^rG 部分多様体で、$f|f^{-1}(T_\lambda) : f^{-1}(T_\lambda) \to T_\lambda$ は帰納法の仮定を満たす。よって、部分的デファイナブル C^rG 自明である。だから、前半の証明が終わった。

後半も同様に得られる。 □

写像 $f : X \to Y$ が**固有**とは、Y の任意のコンパクト部分集合 C に対して、$f^{-1}(C)$ がコンパクトとなることである。

定理 3.2. *([1]) X をアフィン Nash 多様体, $f : X \to \mathbb{R}$ を全射固有 Nash 沈めこみとするとき、f は Nash 自明である。*

問題 3.3. *(1) 定理 3.2 の G 作用つきはどうか?*

(2) デファイナブル版はどうか?

定理 3.4. *([5]) G をコンパクトデファイナブル C^r 群、X をアフィンデファイナブル C^rG 多様体、$1 \leq r < \infty$ とする。G 不変全射固有デファイナブル C^r 沈めこみ $f : X \to \mathbb{R}$ はデファイナブル C^rG 自明である。*

定理 3.4 の証明. 部分的デファイナブル C^rG 自明性定理を適用することにより、$\mathbb{R}$ の分割 $-\infty = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_j < a_{j+1} = \infty$ とデファイナブル C^rG 微分同相写像 $\phi_i : f^{-1}((a_i, a_{i+1})) \to (a_i, a_{i+1}) \times f^{-1}(y_i)$ で $f|f^{-1}((a_i, a_{i+1})) = p_i \circ \phi_i, (0 \leq i \leq j)$ を満たすものが存在する。ただし、p_i は射影 $(a_i, a_{i+1}) \times f^{-1}(y_i) \to (a_i. a_{i+1})$ を表し、$y_i \in (a_i, a_{i+1})$ とする。

$1 \leq i \leq j$ の各 a_i に対して、a_i を含む開区間 I_i とデファイナブル C^rG 写像 $\pi_i : f^{-1}(I_i) \to f^{-1}(a_i)$ が存在して、$F_i = (f, \pi_i) : f^{-1}(I_i) \to I_i \times f^{-1}(a_i)$ がデファイナブル C^rG 微分同相写像となる。デファイナブル C^rG 管状近傍定理より、$f^{-1}(a_i)$ の X におけるデファイナブル C^rG 管状近傍 (U_i, π_i) が存在する。f は固有なので、a_i を含む開区間 I_i が存在して、$f^{-1}(I_i) \subset U_i$ となる。f が固有でなければ、そのような開区間は存在するとは限らない。

必要ならば、I_i を縮小することにより、$F_i = (f, \pi_i) : f^{-1}(I_i) \to I_i \times f^{-1}(a_i)$ は求めるデファイナブル C^rG 微分同相写像である。

上記の議論により、開区間の有限族 $\{J_i\}_{i=1}^{l}$ とデファイナブル C^rG 微分同相写像 h_i : $f^{-1}(J_i) \to J_i \times f^{-1}(y_i)$, $(1 \le i \le l)$ が存在して、$y_i \in J_i$, $\cup_{i=1}^{l} J_i = \mathbb{R}$ かつ h_i と射影 $J_i \times f^{-1}(y_i) \to J_i$ の合成が $f|f^{-1}(J_i)$ となる。

自明写像を得るために、これらの自明写像をはり合わせる。$i \ge 2$ としてよい。$U_{i-1} \cap J_i = (a, b)$ かつ $k_{i-1} : f^{-1}(U_{i-1}) \to U_{i-1} \times f^{-1}(y_1)$ はデファイナブル C^rG 微分同相写像で、$f|f^{-1}(U_{i-1}) = proj_{i-1} \circ k_{i-1}$ を満たすものとする。ただし、$U_{i-1} = \cup_{s=1}^{i-1} J_s$ かつ $proj_{i-1}$ は射影 $U_{i-1} \times f^{-1}(y_1) \to U_{i-1}$ を表すとする。$z \in (a, b) = U_{i-1} \cap J_i$ をとる。このとき、$f^{-1}(y_1) \cong f^{-1}(z) \cong f^{-1}(y_i)$ なので、$f^{-1}(y_1)$ は $f^{-1}(y_i)$ とデファイナブル C^rG 微分同相である。h_i を $f^{-1}(J_i)$ から $J_i \times f^{-1}(y_1)$ へのデファイナブル C^rG 微分同相写像とする。

このとき、デファイナブル C^rG 微分同相写像 $k_{i-1} \circ h_i^{-1} : (a, b) \times f^{-1}(y_1) \to (a, b) \times f^{-1}(y_1), (t, x) \mapsto (t, q(t, x))$ を得る。C^r Nash 関数 $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ で、$u = \frac{a+b}{2}$ on $(-\infty, \frac{3}{4}a + \frac{1}{4}b]$ かつ $u = id$ on $[\frac{1}{4}a + \frac{3}{4}b, \infty)$ を満たすものをとる。$H : (a, b) \times f^{-1}(y_1) \to f^{-1}((a, b)), H(t, x) = k_{i-1}^{-1}(t, q(u(t), x))$ とする。このとき、H はデファイナブル C^rG 微分同相写像で、$H = h_i^{-1}$ $\frac{1}{4}a + \frac{3}{4}b \le t \le b$ かつ $H = k_{i-1}^{-1} \circ (id \times \psi)$ $a \le t \le \frac{3}{4}a + \frac{1}{4}b$ を満たす。ただし、$\psi : f^{-1}(y_1) \to f^{-1}(y_1), \psi(x) = q(\frac{a+b}{2}, x)$。

$$\tilde{k}_i : f^{-1}(U_i) \to U_i \times f^{-1}(y_1),$$
$$\tilde{k}_i(x) = \begin{cases} (id \times \psi)^{-1} \circ k_{i-1}(x), & f(x) \le \frac{3}{4}a + \frac{1}{4}b \\ H^{-1}(x), & \frac{3}{4}a + \frac{1}{4}b \le f(x) \le b \\ h_i(x), & f(x) > b \end{cases}$$

$\tilde{k}_i$ はデファイナブル C^rG 微分同相写像である。これを改めて、t_i とおく。よって k_l が求めるデファイナブル C^rG 微分同相写像である。 □

系 3.5. *([4]) G を有限群とする。X をアフィン Nash G 多様体, $f : X \to \mathbb{R}$ を G 不変全射固有 Nash 沈めこみとするとき、f は Nash G 自明である。*

系 3.5 の証明. 定理 3.4 より、C^r Nash G 微分同相写像 $F = (f, \phi) : X \to \mathbb{R} \times f^{-1}(y)$ で、$f = p \circ F$ を満たすものが存在する。ただし、$p : \mathbb{R} \times f^{-1}(y) \to \mathbb{R}$ は射影を表すとする。近似定理より、Nash G 写像 $\psi : X \to f^{-1}(y)$ で ϕ の近似となるものが存在する。この近似が十分よければ、$H = (f, \psi) : X \to \mathbb{R} \times f^{-1}(y)$ は求める Nash G 微分同相写像である。 □

References

[1] M. Coste and M. Shiota, *Nash triviality in families of Nash manifolds*, Invent. Math. 108 (1992), no. 2, 349–368.

[2] L. van den Dries, *Tame topology and o-minimal structures*, Lecture notes series **248**, London Math. Soc. Cambridge Univ. Press (1998).

[3] L. van den Dries and C. Miller, *Geometric categories and o-minimal structures*, Duke Math. J. **84** (1996), 497-540.

[4] T. Kawakami, *Definable C^rG triviality of G invariant proper definable C^r maps*, 京都大学数理解析研究所講究録 1393 (2004), 102-105.

[5] T. Kawakami, *Equivariant definable C^r approximation theorem, definable C^rG triviality of G invariant definable C^r functions and compactifications*, , Bull. Fac. Edu. Wakayama Univ. 55. (2005), 23-36.

[6] T. Kawakami, *Equivariant differential topology in an o-minimal expansion of the field of real numbers*, Topology Appl. **123** (2002), 323-349.